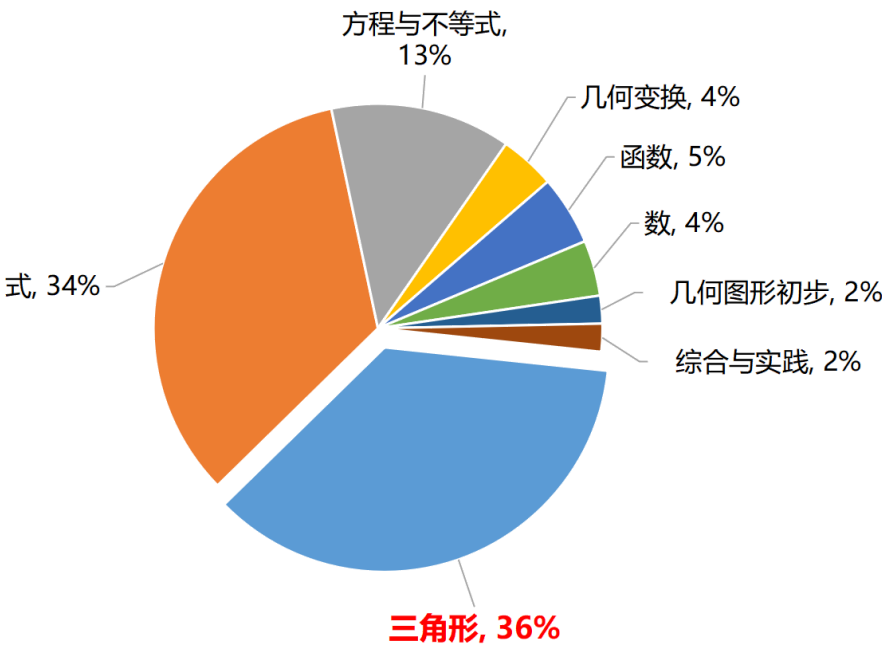


第1讲倍长中线

本模块属于《全等三角形》、《角平分线进阶》的后续模块，重点包括全等的特殊辅助线，综合性较强，本模块内容在考试常以压轴题的形式出现，需要帮学生建立一种基本题型的常规解法，遇到类似的题目能有思路、方向。

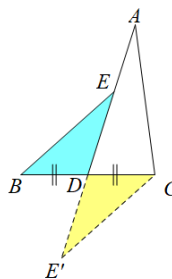
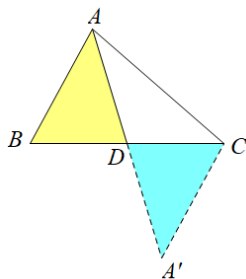
本模块难度较高，适用于全等三角形特殊辅助线的专题学习，本模块分为倍长中线、截长补短 2 讲内容，配套练习与讲义内容完全对照，帮助学生巩固各类题的解题技巧。



知识点	难度	考频
倍长中线	★★★★★	中
倍长类中线	★★★★★	中
截长法	★★★★★	高
补短法	★★★★★	中

一、 倍长中线

倍长中线：即延长三角形的中线(或过中点的线)，使得延长后的线段是原中线的两倍。
其目的是构造一对 **(SAS型)** 的全等三角形；

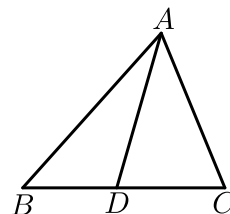


倍长中线模型的结论：① **$AB = CE$** 、 **$AB \parallel CE$**
② 通过构造SAS型的 **8字** 全等，达到构造平行线和转移线段的目的

栗子1

求线段的取值范围

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = 5$ ，中线 $AD = 7$ ，则 AB 边的取值范围是（ ）。



A. $1 < AB < 29$

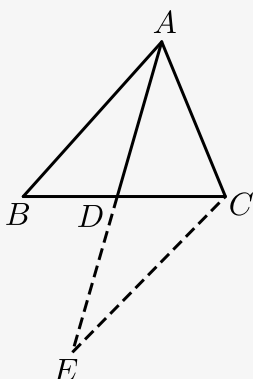
B. $4 < AB < 24$

C. $5 < AB < 19$

D. $9 < AB < 19$

【答案】 D

【解析】 如图，延长 AD 至 E ，使 $DE = AD$ ，



$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore BD = CD$ ，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECD$ 中，

$$\begin{cases} BD = CD \\ \angle ADB = \angle EDC, \\ AD = ED \end{cases}$$

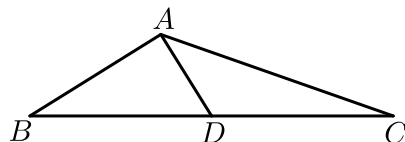
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECD (\text{SAS})$,
 $\therefore AB = CE$,
 $\therefore AD = 7$,
 $\therefore AE = 7 + 7 = 14$,
 $\therefore 14 + 5 = 19$, $14 - 5 = 9$,
 $\therefore 9 < CE < 19$,
 即 $9 < AB < 19$.
 故选D .

【标注】【知识点】倍长中线

栗子2

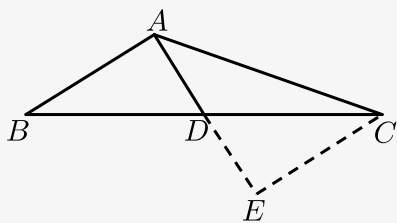
求线段的值

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 120^\circ$ ， AD 是 BC 边上的中线，且 $AB \perp AD$ ， $AB = 6$ ，则 AC 的长为 _____ .



【答案】12

【解析】延长 AD 到点 E 使 $DE = AD$ ，连接 CE ，



在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECD$ 中，

$$\begin{cases} AD = DE \\ \angle ADB = \angle EDC , \\ DB = DC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECD$,

$\therefore AB = EC = 6$, $\angle BAD = \angle E = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 120^\circ$, $\angle BAD = 90^\circ$,

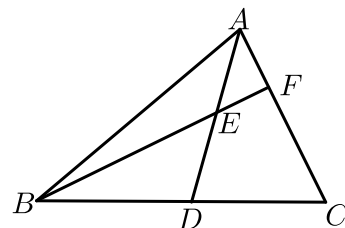
$\therefore \angle DAC = 30^\circ$,

$\therefore AC = 2EC = 12$.

故答案为12 .

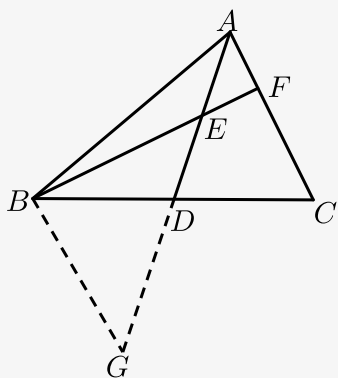
【标注】【知识点】30°特殊角的性质应用；倍长（类）中线

3. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， E 是 AD 上一点， BE 交 AC 于 F ，若 $BE = AC$ ， $BF = 9$ ， $CF = 6$ ，则 AF 的长度为 _____ .



【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】如图，延长 AD 到 G 使 $DG = AD$ ，连接 BG ，



$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore CD = BD$ ，

在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle GBD$ 中，

$$\begin{cases} CD = BD \\ \angle ADC = \angle BDG, \\ AD = DG \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle GBD(\text{SAS})$ ，

$\therefore \angle CAD = \angle G$ ， $AC = BG$ ，

$\because BE = AC$ ，

$\therefore BE = BG$ ，

$\therefore \angle G = \angle BEG$ ，

$\because \angle BEG = \angle AEF$ ，

$\therefore \angle AEF = \angle EAF$ ，

$\therefore EF = AF$ ， $AC = AF + CF$ ， $BE = BF - AF$ ，

$$\begin{aligned}\therefore AC &= BE, \\ \therefore AF + CF &= BF - AF, \\ \text{即 } AF + 6 &= 9 - AF, \\ \text{即 } AF &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

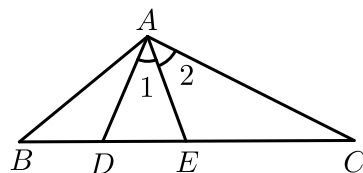
【标注】【知识点】倍长中线

栗子3

求证线段的数量关系或位置关系、角度关系

4. 如图，已知 $\triangle ABC$ ， D 、 E 在边 BC 上， $BD = DE$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ， $AC = 2AD$ 。

求证： $AB = CE$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】延长 AD 至 H ，使 $DH = DA$ ，连接 EH ，

$$\because AC = 2AD, \therefore AH = AC,$$

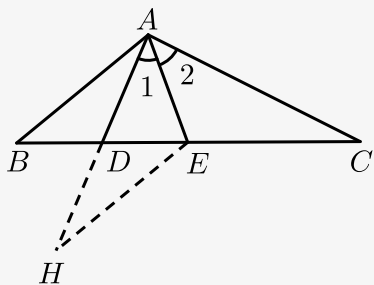
在 $\triangle EAH$ 和 $\triangle EAC$ 中，

$$\begin{cases} EA = EA \\ \angle 1 = \angle 2 \\ AH = AC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle EAH \cong \triangle EAC (\text{SAS}),$$

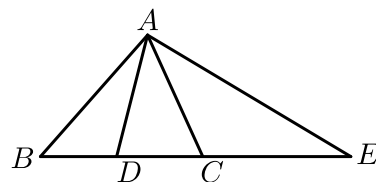
又易证 $\triangle ABD \cong \triangle HED (\text{SAS})$ ，

$$AB = HE = CE.$$



【标注】【知识点】倍长（类）中线

5. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，点 E 在 BC 的延长线上， $CE = AB$ ， $\angle BAC = \angle BCA$ ，求证：
 $AE = 2AD$.



【答案】证明见解析 .

【解析】延长 AD 至 M ，

使 $DM = AD$

,

$\therefore AD$ 是

$\triangle ABC$ 的中

线，

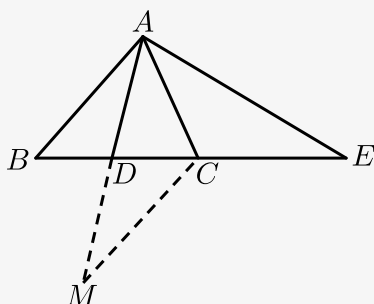
$\therefore DB = CD$ ，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle MDC$ 中
$$\begin{cases} BD = CD \\ \angle ADB = \angle MDC, \\ AD = DM \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle MCD$ (SAS) ,

$\therefore MC = AB$, $\angle B = \angle MCD$,

$\therefore AB = CE$,



$\therefore CM = CE$,
 $\therefore \angle BAC = \angle BCA$,
 $\therefore \angle B + \angle BAC = \angle ACB + \angle MCD$,
 即 $\angle ACM = \angle ACE$,
 在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle ACM$ 中 $\begin{cases} AC = AC \\ \angle ACE = \angle ACM , \\ CM = CE \end{cases}$
 $\therefore \triangle ACM \cong \triangle ACE (\text{SAS})$.
 $\therefore AE = AM$,
 $\therefore AM = 2AD$,
 $\therefore AE = 2AD$.

【标注】【思想】数形结合思想

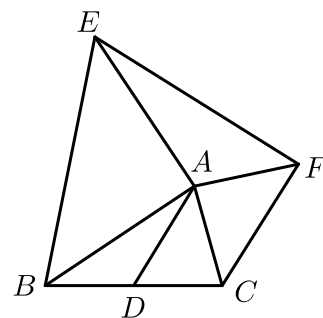
【知识点】SAS

【知识点】全等三角形的对应边与角

【能力】推理论证能力

栗子4

6. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， $AB = AE$ ， $AC = AF$ ， $\angle BAE = \angle FAC = 90^\circ$. 判断线段 AD 与 EF 数量和位置关系 .



【答案】 $EF = 2AD$ ， $EF \perp AD$.

【解析】延长 AD 到 M ，使得 $DM = AD$ ，连接 MC ，

$\therefore AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$$\text{在}\triangle ABD\text{和}\triangle MCD\text{中}, \begin{cases} AD = DM \\ \angle ADB = \angle MDC, \\ BD = CD \end{cases}$$

$$\therefore AB = MC, \angle BAD = \angle M.$$

$$\therefore AE = MC,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle FAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle EAF = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle CAD + \angle BAD + \angle MCA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle MCA.$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle CMA$ 中, $\begin{cases} AF=AC \\ \angle EAF=\angle MCA, \\ AE=CM \end{cases}$

$$\therefore EF = AM, \angle CAM = \angle AFE,$$

$$\therefore \angle CAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAM + \angle FAN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAM = \angle AFE,$$

$$\therefore \angle AFE + \angle FAN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ANF = 90^\circ,$$

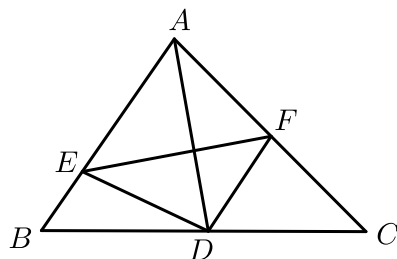
$$\therefore EF \perp AD.$$

【标注】【知识点】中点类辅助线

二、倍长类中线

栗子5

7. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， E 、 F 分别在 AB 、 AC 上，且 $DE \perp DF$ ，则（ ）。



A. $BE + CF > EF$

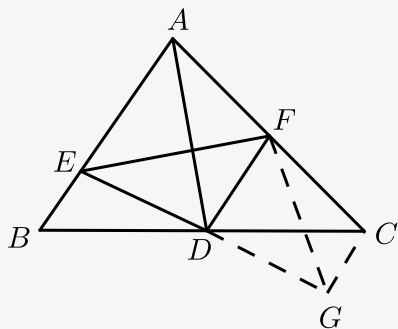
B. $BE + CF = EF$

C. $BE + CF < EF$

D. $BE + CF$ 与 EF 的大小关系不确定

【答案】A

【解析】



延长 ED 到 G ，使 $DG = ED$ ，连接 CG ， FG ，

在 $\triangle BED$ 与 $\triangle CGD$ 中，

$$\therefore \begin{cases} ED = GD \\ \angle BDE = \angle CDG, \\ BD = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BED \cong \triangle CGD (\text{SAS}),$$

$$\therefore BE = CG,$$

$$\text{又} \because DE \perp DF,$$

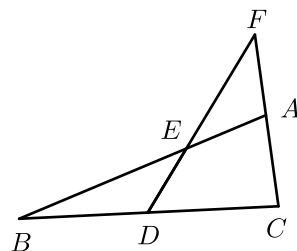
$$\therefore FD \text{ 是 } EG \text{ 的垂直平分线},$$

$\therefore FG = EF$,
 $\therefore GC + CF > FG$,
 $\therefore BE + CF > EF$,
 故选A .

【标注】【知识点】倍长（类）中线

栗子6

8. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 BC 的中点，过点 D 作直线交 AB ， CA 的延长线于点 E ， F ．当 $BE = CF$ 时，求证： $AE = AF$ ．

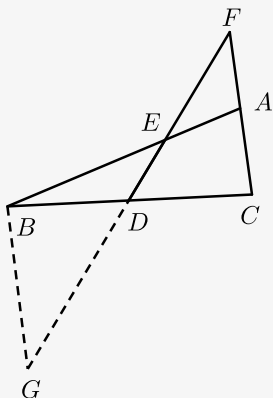


【答案】证明见解析．

【解析】延长 FD 至 G ，使得 $DG = DF$ ，连接 BG ．

$\therefore$ 点 D 是 BC 的中
 点，
 $\therefore BD = CD$.

在 $\triangle BDG$ 和
 $\triangle CDF$ 中，



$$\begin{cases} DG = DF \\ \angle BDG = \angle CDF , \\ BD = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDG \cong \triangle CDF \text{ (SAS)} .$$

$$\therefore BG = CF .$$

$$\therefore BE = CF ,$$

$$\therefore BE = BG .$$

$$\therefore \angle G = \angle BEG .$$

$$\therefore \angle BEG = \angle AEF ,$$

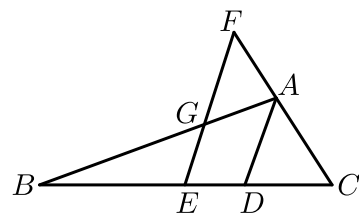
$$\therefore \angle G = \angle AEF .$$

$$\therefore \angle F = \angle AEF .$$

$$\therefore AE = AF .$$

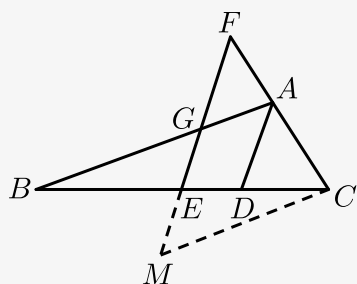
【标注】【知识点】倍长（类）中线

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 交 BC 于点 D ，点 E 是 BC 中点， $EF \parallel AD$ 交 CA 的延长线于点 F ，交 AB 于点 G ，若 $BG = CF$ ．求证： AD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线．



【答案】证明见解析．

【解析】方法一：延长 GE 至点 M ，使得 $EM = GE$



在 $\triangle BEG$ 和 $\triangle CEM$ 中，

$$\begin{cases} BE = CE \\ \angle BEG = \angle CEM, \\ EG = EM \end{cases}$$

$\therefore \triangle BEG \cong \triangle CEM$ (SAS) ,

$\therefore BG = CM$, $\angle BGE = \angle CME$,

$\therefore BG = CF$,

$\therefore CM = CF$,

$\therefore \angle M = \angle F$,

$\therefore AD \parallel EF$,

$\therefore \angle F = \angle DAC$,

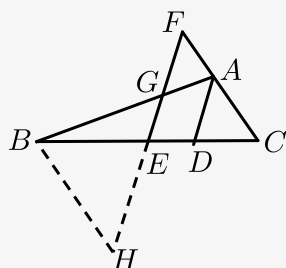
$\angle BGE = \angle BAD$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$,

$\therefore AD$ 为 $\triangle ABC$ 的角平分线 .

方法二：延长 FE 到点 H ，使 $HE = FE$ ，

连接 BH .



在 $\triangle CEF$ 和 $\triangle BEH$ 中，

$$\begin{cases} CE = BE \\ \angle CEF = \angle BEH, \\ FE = HE \end{cases}$$

$\therefore \triangle CEF \cong \triangle BEH$ (SAS) ,

$\therefore \angle EFC = \angle EHB$, $CF = BH = BG$,

$\therefore \angle EHB = \angle BGE$,

而 $\angle BGE = \angle AGF$,

$\therefore \angle AFG = \angle AGF$,

又 $\therefore EF \parallel AD$,

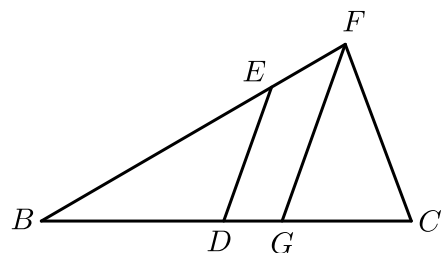
$\therefore \angle AFG = \angle CAD$, $\angle AGF = \angle BAD$,

$\therefore \angle CAD = \angle BAD$,

$\therefore AD$ 为 $\triangle ABC$ 的角平分线 .

【标注】【知识点】倍长（类）中线

10. 如图, $\triangle BCF$ 中, $FC = 4$, $BF = 7$, D 是 BC 的中点, FG 平分 $\angle BFC$, 过 F 作 $FG \parallel DE$ 交 BC 于 G , 求 BE 的长.



【答案】 5.5 .

【解析】 延长 ED 于点 H , 使 $DH = ED$, 连接 CH ,

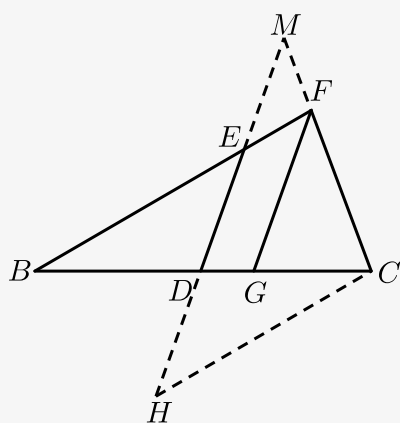
延长 DE , CF , 交于点 M ,

$\because D$ 为 BC 中点,

$\therefore BD = CD$,

在 $\triangle BDE$ 和

$\triangle CDH$ 中,



$$\begin{cases} DE = DH \\ \angle BDE = \angle CDH \\ BD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDH$ (SAS)

$\therefore BE = CH$, $\angle BED = \angle H$,

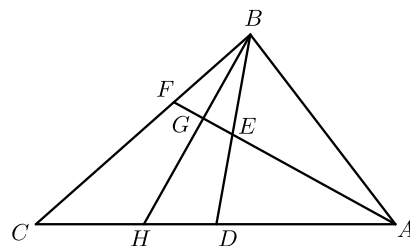
$\because \angle BED = \angle MEF$,

$\angle BED = \angle H$

$\therefore FG$ 平分 $\angle BFC$
 $\therefore \angle BFG = \angle CFG$,
 $\therefore FG \parallel ED$
 $\therefore \angle EMF = \angle CFG$, $\angle MEF = \angle EFG$,
 $\therefore \angle EMF = \angle MEF$,
 $\therefore FM = FE$,
 $\therefore \angle H = \angle MEF$, $\angle EMF = \angle MEF$,
 $\therefore \angle H = \angle EMF$,
 $\therefore CH = CM$,
 设 $BE = x$
 则 $CH = CM = x$,
 $\therefore FC = 4$,
 $\therefore FM = x - 4$,
 $\therefore BF = 7$,
 $\therefore EF = 7 - x$,
 $\therefore x - 4 = 7 - x$,
 $\therefore x = \frac{11}{2}$.
 即 $BE = 5.5$.

【标注】【知识点】SAS

11. 如图, $\triangle ABC$ 中, BD 为中线, BH 平分 $\angle CBD$, $AF \perp BH$ 交 BD 、 BH 、 BC 于点 E 、 G 、 F , 求证: $2DE = FC$.



【答案】证明见解析。

【解析】此题采用倍长中线方法：

倍长 ED 至点 P ，连接 CP ，

$$\therefore \begin{cases} ED = DP \\ \angle EDA = \angle PDC, \\ AD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle DEA \cong \triangle DPC$ ，

$\therefore AE \parallel CP$ ，

$\therefore BH \perp AF$ ，

$\therefore BH \perp CP$ ，

又 $\therefore BH$ 平分 $\angle CBD$

，
根据二线合一结论可

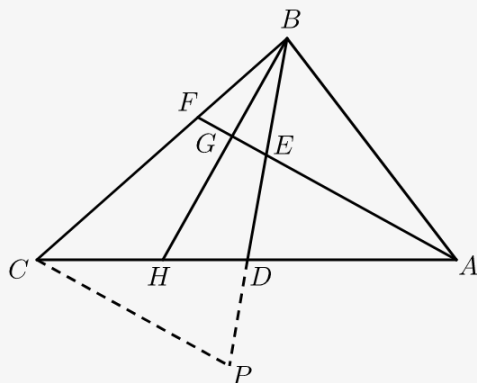
知： $\triangle BCP$ 是等腰三

角形，

$\therefore BC = BP$ ，

同理可知 $\triangle BEF$ 是等腰三角形， $BF = BE$ ，

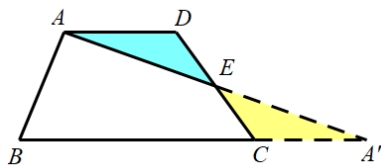
$\therefore PE = FC$ ，即 $2DE = FC$ 。



【标注】【知识点】倍长（类）中线

三、平行线 + 中点

平行线+中点：已知中点和一组平行线的情况下，通过延长相交的方式构造一对8字全等的三角形



平行线+中点模型的结论：

① $AD = A'C$ 、 $AE = A'E$

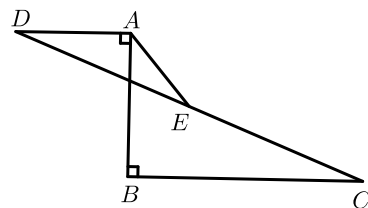
② 通过构造AAS或ASA型的8字全等，达到转移线段的目的

③ 与倍长中线属于同一类型的辅助线（已知条件的不同，构造全等的方式不同）

【备注】倍长中线构造8字全等，可得到平行线

平行线构造8字全等，可得到线段的中点

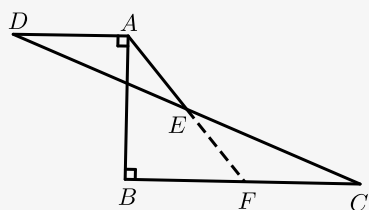
12. 如图，已知 $AD \perp AB$ 于 A ， $AB \perp BC$ 于 B ， $\angle DAE = 135^\circ$ ，且 E 为 CD 中点，若 $AD = 3$ ， $AB = 4$ ，则 BC 的长度为（ ）。



- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

【答案】C

【解析】如图，延长 AE 交 BC 于点 F ，



$\because AD \perp AB$ 于点 A ， $AB \perp BC$ 于点 B ，

$\therefore \angle DAB = \angle B = 90^\circ$ ，

$\therefore DA \parallel BC$ ，

$\therefore \angle D = \angle C$ ， $\angle DAE = \angle CFE$ 。

$\because$ 点 E 为 CD 中点，

$\therefore DE = CE$ 。

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle FCE$ 中，

$$\begin{cases} \angle DAE = \angle CFE \\ \angle D = \angle C \\ DE = CE \end{cases} ,$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FCE$ (AAS)，

$\therefore AD = FC$ 。

又 $\because AD = 3$ ，

$\therefore FC = 3$ 。

$\because \angle DAE = 135^\circ$ ， $\angle DAB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAF = \angle DAE - \angle DAB = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$ 。

又 $\because \angle B = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle AFB$ 是等腰直角三角形，

$\therefore FB = AB = 4$ 。

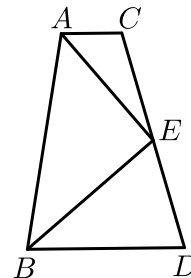
又 $\because FC = 3$,

$\therefore BC = FB + FC = 4 + 3 = 7$.

故选C.

【标注】【知识点】倍长(类)中线

13. 如图, $AC \parallel BD$, E 为 CD 的中点, $AE \perp BE$.



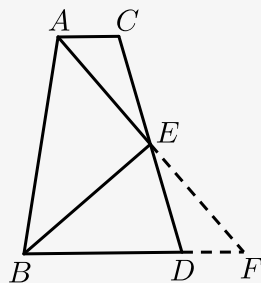
(1) 求证: AE 平分 $\angle BAC$, BE 平分 $\angle ABD$.

(2) 线段 AB 、 AC 、 BD 有怎样的数量关系? 请写出你的结论并证明.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $AB = BD + AC$; 证明见解析.

【解析】(1) 如图所示, 延长 AE 交 BD 的延长线于 F ,



$\because AC \parallel BD$,

$\therefore \angle CAE = \angle DFE$,

$\because E$ 为 CD 的中点,

$\therefore CE = DE$,

在 $\triangle CAE$ 和 $\triangle DFE$ 中,

$$\begin{cases} \angle CAE = \angle DFE \\ \angle AEC = \angle FED, \\ CE = DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle CAE \cong \triangle DFE (\text{AAS})$,

$\therefore AC = DF, AE = FE$,

$\because AE \perp BE$,

$\therefore \angle AEB = \angle FEB = 90^\circ$,

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle FEB$ 中,

$$\begin{cases} AE = FE \\ \angle AEB = \angle FEB, \\ BE = BE \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle FEB (\text{SAS})$,

$\therefore \angle BAE = \angle F, \angle ABE = \angle FBE$,

$\therefore \angle CAE = \angle BAE$,

$\therefore AE$ 平分 $\angle BAC$, BE 平分 $\angle ABD$.

(2) 由(1)可得, $\triangle AEB \cong \triangle FEB$,

$\therefore AB = BF$,

即 $AB = BD + DF$,

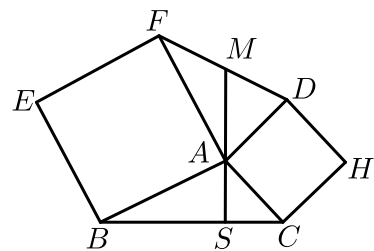
由(1)可得, $DF = AC$,

$\therefore AB = BD + AC$.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

独步天下2

14. $ABEF$ 和 $ACHD$ 均为正方形, $AS \perp BC$ 于 S , 交 FD 于 M , 求证:



(1) M 为 FD 的中点.

(2) $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADF}$.

【答案】（1）证明见解析．

（2）证明见解析．

【解析】（1）方法一：过 F 作 ST 的垂线，交 ST 延长线于点 Q ，

过 D 作 ST 的垂线，交 ST 于点 P ，

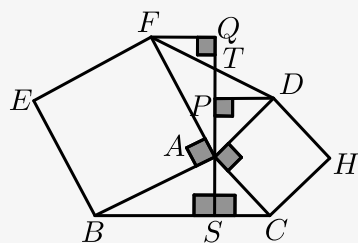
三垂直模型得 $\triangle APD \cong \triangle CSA$ ， $\triangle AFQ \cong \triangle ABS$ ，

$\therefore DP = AS = FQ$ ，

$\because \angle FTQ = \angle DTP$ ，

$\therefore \triangle FQT \cong \triangle DPT$ ，

故 $FT = DT$ ．即 T 为 FD 的中点．



方法二：过 F 作 AD 平行线，与 AT 延长线交于点 M ，连接 DM ，

$\angle FTD + \angle BAC = 180^\circ$ ， $\angle FTD + \angle MFT = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle MFT = \angle CAB$ ，

$\angle FTM + \angle BAS = 90^\circ$ ， $\angle ABC + \angle BAS = 90^\circ$

$\therefore \angle FTM = \angle ABC$ ，

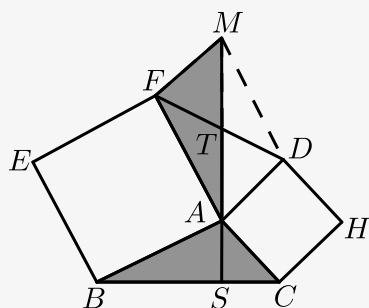
又 $\because FT = AB$ ，

$\therefore \triangle FMT \cong \triangle ACB$ ，即 $FM = AD$ ，

又 $\because FM \parallel AD$

$\therefore \triangle FTM \cong \triangle DTA$ ，

$\therefore FT = DT$ ．



方法三：过点 A 作 $AM \perp AF$ ，且 $AM = AF$ ，

连接 MC ，即将 $\triangle FAD$ 绕点 A 旋转 90° 到 $\triangle MAC$ ，

则 $\triangle MAC \cong \triangle FAD$ ，

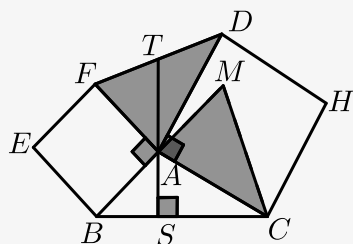
$\therefore \angle FAD + \angle BAC = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle MAC + \angle BAC = 180^\circ$ 。

即 M, A, B 三点共线且 A 为 MB 中点，

而旋转之后 $AT \parallel BC$ ，即旋转过后 AT 即为 $\triangle MAC$ 中位线，

$\therefore T$ 为 DF 中点。



(2) 过 F 作 ST 的垂线，交 ST 延长线于点 Q ，

过 D 作 ST 的垂线，交 ST 于点 P ，

三垂直模型得 $\triangle APD \cong \triangle CSA$ ， $\triangle AFQ \cong \triangle ABS$ ，

$\therefore DP = AS = FQ$ ，

$\therefore \angle FTQ = \angle DTP$ ，

$\therefore \triangle FQT \cong \triangle DPT$ ，

故 $FT = DT$ ， $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DPA} = S_{\triangle AFT} = S_{\triangle DPT} = S_{\triangle AFD}$ 。

【标注】【知识点】三垂直模型